

Điều khiển LQR cho hệ bóng thanh trục lệch: mô phỏng và thực nghiệm

LQR control for ball and beam system with deviated axis: simulation and experiment

Phạm Văn Chinh, Hoàng Duy Tân, Nguyễn Văn Đông Hải, Nguyễn Trung Dũng, Lương Minh Đạt, Dương Hoàng Nam, Ngô Trần Minh Tú, Đặng Thái An

Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Thành phố Hồ Chí Minh, Tp. Thủ Đức

Tác giả liên hệ: Hoàng Duy Tân, Email: 18151034@student.hcmute.edu.vn

Tóm tắt: Hệ bóng thanh trục lệch là một hệ thống một vào nhiều ra (single input-multi output – SIMO) thường được sử dụng trong các phòng thí nghiệm để kiểm chứng giải thuật điều khiển. Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng và khảo sát một bộ điều khiển LQR trên ở mô phỏng. Bộ điều khiển chứng minh khả năng điều khiển cân bằng hệ thống ở các vị trí đặt khác nhau. Tiếp đến, chúng tôi tiến hành khảo sát bộ điều khiển trên ở đối tượng bóng thanh trục lệch thông qua board điều khiển STM32F4. Thông qua mô phỏng và thực nghiệm, bộ điều khiển LQR của chúng tôi đã thành công điều khiển hệ thống. Ngoài ra, các quy luật điều chỉnh thông số điều khiển cũng được kiểm chứng và tổng kết lại.

Từ khóa: bóng thanh trục lệch; cân bằng; đối tượng SIMO; điều khiển LQR; điều khiển; STM32F4

Abstract: The Ball and Beam system with Deviated Axis is a single input-multi output (SIMO) system commonly used in laboratories to test control algorithms. In this paper, we build and investigate an LQR controller in simulation. The controller demonstrates the ability to control the system balance in different placement positions. Next, we conduct a survey of the above controller in the object of the deflection bar through the control board STM32F4. Through simulation and experiment, our LQR controller has successfully controlled the system. In addition, the control parameters adjustment rules are also verified and summarized.

Keywords: Ball and Beam; LQR algorithm; Optimal control; SIMO; STM32F4

1. Đặt vấn đề

Hệ bóng thanh trục lệch (BTTL) là một hệ thống cân bằng quen thuộc và được sử dụng hầu hết ở các trường đại học. Hãng Quanser đã chế tạo một mô hình chuẩn cho các nghiên cứu về điều khiển tự động (ĐKTĐ) [1]. Nhiều nghiên cứu đã được thực hiện thành công trên đối tượng này như LQR [2], trượt [3],... Tuy nhiên, mô hình trên có giá thành quá cao. Do đó, trong tình hình phòng thí nghiệm (PTN) tại Việt Nam, để giảm chi phí chế tạo, một số nhóm đã chế tạo hệ bóng thanh ở Việt

Nam nhưng các kết quả đa phần chỉ được sử dụng cho hệ bóng thanh trục giữa [4], [7], [8]. Trong [4], một số tác giả đã áp dụng thành công các giải thuật phức tạp như LQR [9] hay trượt [10] cho hệ BTTL nhưng các tác giả trên sử dụng vi xử lý DSP TMS320F28335. Đây là một vi xử lý rất mắc tiền (khoảng 5 triệu VND/ board). Để giảm thiểu chi phí cho mô hình, nhóm sử dụng vi xử lý STM32F4 với giá thành thấp hơn (khoảng 500.000 VND).

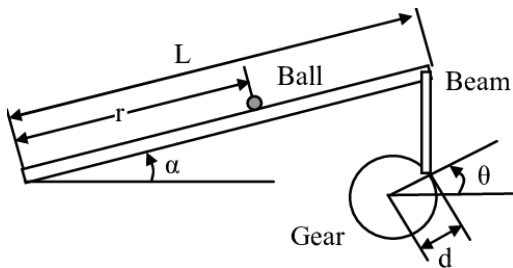
Trong bài báo này, với một đối tượng BTTL được tự chế tạo trong PTN với

STM32F4, nhóm sử dụng phương pháp LQR được lựa chọn để thực hiện cân bằng vị trí cho viên bi tại một điểm cho trước. Bên cạnh đó, các khảo sát về sự thay đổi thông số điều khiển cũng được nhóm thực hiện để kiểm chứng sự tinh chỉnh thông số điều khiển của giải thuật LQR. Đồng thời thông qua hệ BTTL, chứng minh được tính hiệu quả của giải thuật LQR và từ đó có thể áp dụng vào những ứng dụng khác như xe cân bằng, duy trì quỹ đạo tên lửa,....

2. Phân tích hệ bóng thanh trục lệch

2.1. Mô hình toán học

Mô hình hệ bóng thanh trục lệch có dạng như Hình 1.



Hình 1. Hệ thống bóng thanh trục lệch

Như Hình 1, hệ bóng thanh trục lệch có viên bi kim loại được đặt trên một cặp thanh song song để viên bi có thể lăn trên đó dọc theo chiều dài của thanh. Một cánh tay đòn được gắn liền cuối của cặp thanh và được gắn vào bánh răng của động cơ. Khi bánh răng động cơ quay một góc θ , nó sẽ làm thay đổi góc của cặp thanh một góc α so với phương nằm ngang. Khi đó, trọng lực sẽ làm viên bi lăn dọc theo thanh. Phương trình động lực học của hệ bóng thanh trục lệch có thể viết dưới dạng:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-\left[2mrr\dot{\alpha} + \frac{L}{2}gM \cos(\alpha) + gmrcos(\alpha)\right] + u}{mr^2 + Jb} \quad (1)$$

$$\ddot{r} = \frac{mr\dot{\alpha}^2 - mg \sin(\alpha)}{m + \frac{JB}{R^2}} \quad (2)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{L} \sin(\theta) \quad (3)$$

Trong đó, $\alpha(t)$ là góc của thanh so với phương nằm ngang (rad); $r(t)$ là vị trí viên bi (m); $\theta(t)$ là góc bánh răng động cơ (rad); d là bán kính của đĩa quay (m); g là gia tốc trọng trường (m/s^2); m là khối lượng của viên bi (kg); M là khối lượng của thanhbeam (kg); L là chiều dài của thanh (m); R là bán kính viên bi (m); u là momen động cơ tạo ra (Nm); Jb là moment quán tính của thanh (kgm^2); JB là moment quán tính của viên (kgm^2).

2.2. Tuyến tính hóa hệ bóng thanh trục lệch

Giả sử rằng:

$$X^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \quad (4)$$

$$= [r, \dot{r}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$$

Ta có:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mx_1\dot{\alpha}^2 - mg \sin(\alpha)}{m + \frac{JB}{R^2}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-\left[2mrr\dot{\alpha} + \frac{L}{2}gM \cos(\alpha) + gmrcos(\alpha)\right] + u}{mr^2 + Jb} \end{cases} \quad (5)$$

Đưa hệ phi tuyến về dạng tuyến tính:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (6)$$

Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$

$m=0.05(\text{kg}); M=0.5(\text{kg});$
 $d=0.08(\text{m}); g=9.81(\text{m/s}^2);$
 $L=0.565(\text{m}); R=0.0125(\text{m});$
 $r(0)=0.565(\text{m}); \dot{r}(0)=0;$
 $\alpha(0) = -0.1419(\text{rad}); \dot{\alpha}(0)=0;$
 $J_B = \frac{2mR^2}{5} (\text{kgm}^2); J_b = \frac{ML^2}{3} (\text{N/m})$

3. Thiết kế bộ điều khiển LQR

Chọn vị trí xác lập để viên bi cân bằng:

$$x_1 = 0.3; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = g\left(\frac{ML}{2} + mx_1\right)$$

Từ phương trình (5), (7) và (8), ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.5003 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.3298 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Cần tính toán ma trận K tối ưu cho hệ bóng thanh trực lệch:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (10)$$

Theo phương trình Riccati để tính toán ma trận P chưa biết dựa vào ma trận của hệ thống là A và B. Từ đó ta có được ma trận K tối ưu cho hệ bóng thanh trực lệch:

$$-\dot{P} = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (11)$$

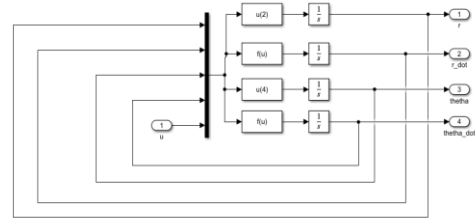
$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \quad (12)$$

Trong đó phương trình (11) là Riccati Differential Equation (RDE) và phương trình (12) là Algebraic Riccati Equation (ARE). Q là ma trận chi phí trạng thái và R là ma trận chi phí đầu vào.

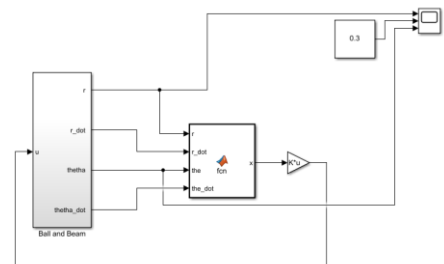
4. Mô phỏng và thực nghiệm điều khiển tối ưu hệ thống bóng thanh trực lệch

4.1. Mô phỏng trên Matlab

Ta có thông số mô hình:



Hình 2. Mô phỏng hệ thống



Hình 3. Mô phỏng bộ điều khiển LQR

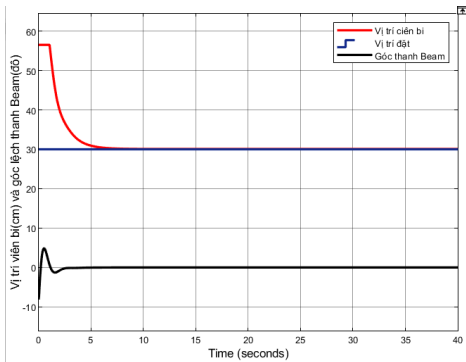
Chọn ma trận Q và R:

$$Q = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}; R = 0.1 \quad (14)$$

Từ (9) và (14), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

$$K = [-5.0993 \quad -7.1005 \quad 22.3627 \quad 4.8560]$$



Hình 4. Kết quả 1 mô phỏng vị trí viên bi và góc lệch thanh

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 7.9s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 4.9s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 2.2cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.05 độ

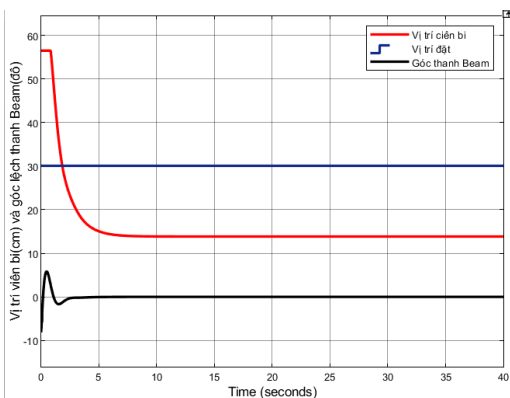
Chọn ma trận Q và R:

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; R = 0.1 \quad (15)$$

Từ (9) và (15), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = \text{lqr}(A,B,Q,R)$$

$$K = [-10.5025 \quad -15.4056 \quad 48.0579 \quad 10.2736]$$



Hình 5. Kết quả 2 mô phỏng vị trí viên bi và góc lệch thanh

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 7.35s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 3.178s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 15.98cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 1.9 độ

Chọn ma trận Q và R:

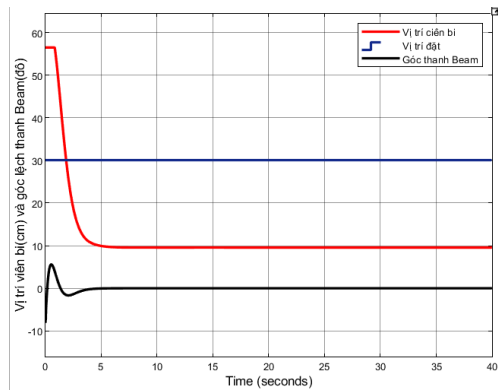
$$Q = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$R = 0.01$$

Từ (9) và (16), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = \text{lqr}(A,B,Q,R)$$

$$K = [-14.9902 \quad -22.2948 \quad 69.3624 \quad 14.7650]$$



Hình 6. Kết quả 3 mô phỏng vị trí viên bi và góc lệch thanh

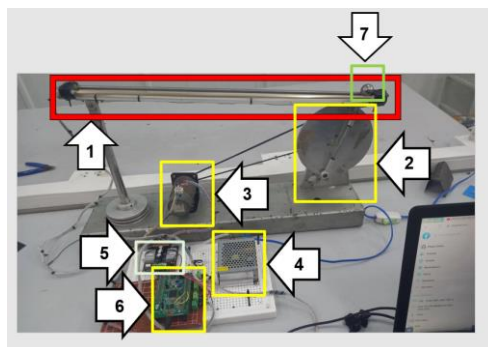
Thời gian xác lập vị trí viên bi là 7.19s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 4.88s

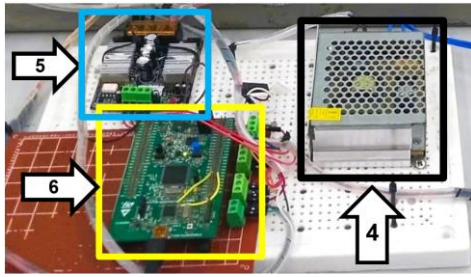
Sai số xác lập vị trí viên bi là 20.54cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.059 độ

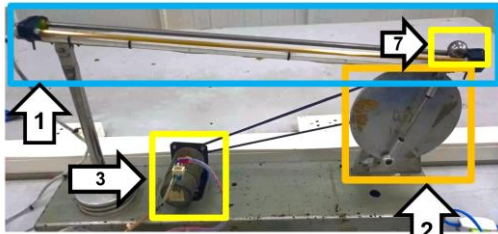
4.2. Mô hình thực tế



Hình 7. Tổng quan hệ bóng thanh trực lệch thực tế



Hình 8. Chi tiết hệ bóng thanh trục lệch 1



Hình 9. Chi tiết hệ bóng thanh trục lệch 2

- (1) Thanh Beam
- (2) Level arm
- (3) Motor
- (4) Nguồn 12V
- (5) Driver
- (6) Stm32f407

Chọn ma trận Q và R:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

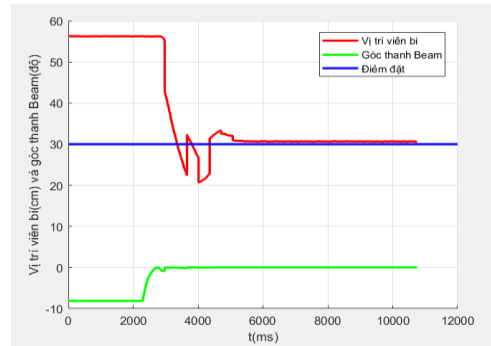
$$Q = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \quad (18)$$

R = 2.15

Từ (9) và (18), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = [-10.6078 \quad -9.8339 \quad 34.6913 \quad 8.5532]$$

Điểm đặt viên bi r = 30 cm



Hình 10. Kết quả 1 mô hình thực hệ bóng thanh trục lệch

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 5.82s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 3.72s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 0.6cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.05 độ

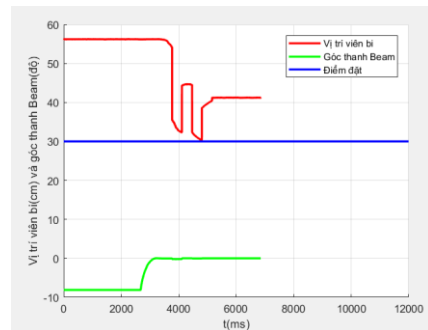
Chọn ma trận Q và R:

$$Q = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}; R = 2.75 \quad (19)$$

Từ (9) và (19), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = [-9.4666 \quad -8.7055 \quad 30.7262 \quad 7.5861]$$

Điểm đặt viên bi r = 30 cm



Hình 11. Kết quả 2 mô hình thực hệ bóng thanh trục lệch

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 5.32s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 3.27s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 11.24cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.04 độ

Chọn ma trận Q và R:

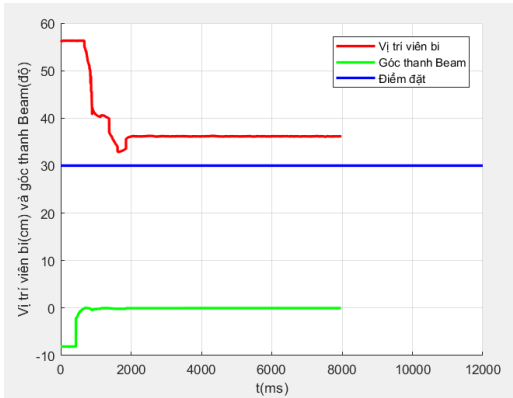
$$Q = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$R = 2.5$$

Từ (9) và (20), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = [-9.8918 \quad -9.9069 \quad 37.9788 \quad 10.1839]$$

Điểm đặt viên bi $r = 30$ cm



Hình 12. Kết quả 3 mô hình thực hệ bóng thanh trục lệch

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 2.8s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 1.3s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 6.17cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.07 độ

Chọn ma trận Q và R:

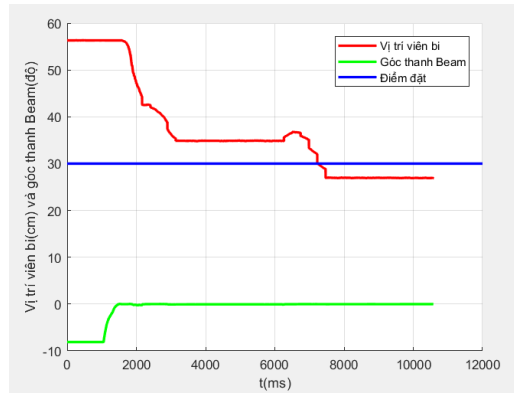
$$Q = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$R = 2.5$$

Từ (9) và (21), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = [-9.8918 \quad -9.1613 \quad 32.4546 \quad 7.9481]$$

Điểm đặt viên bi $r = 30$ cm



Hình 2. Kết quả 4 mô hình thực hệ bóng thanh trục lệch

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 7.57s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 2.23s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 3.1cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.04 độ

Chọn ma trận Q và R:

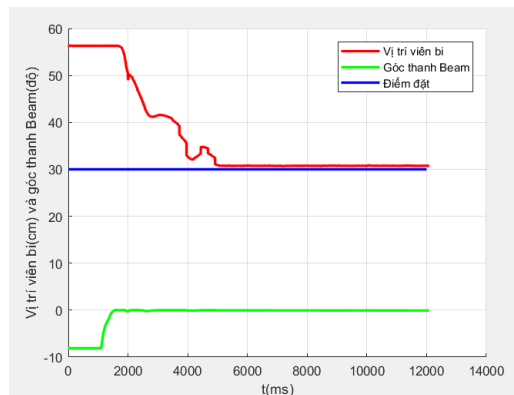
$$Q = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$R = 2.5$$

Từ (9) và (21), tính ma trận K bằng Matlab:

$$K = [-9.8918 \quad -10.8926 \quad 35.2211 \quad 7.9651]$$

Điểm đặt viên bi $r = 30$ cm



Hình 14. Kết quả 5 mô hình thực hệ bóng thanh trục lệch

Thời gian xác lập vị trí viên bi là 5.04s

Thời gian xác lập góc thanh beam là 2.24s

Sai số xác lập vị trí viên bi là 0.73cm

Sai số xác lập góc thanh beam là 0.06 độ

Khi tăng R, thời gian xác lập vị trí viên bi và thanh beam giảm, nhưng sai số xác lập vị trí viên bi tăng, sai số xác lập của thanh beam thay đổi không đáng kể.

Khi tăng Q4, thời gian xác lập giảm mạnh chỉ còn 2.8s, nhưng sai số xác lập vị trí viên bi tăng (6.17cm). Khi tăng Q3, thời gian xác lập vị trí viên bi tăng mạnh(7.57s), vị trí viên bi vẫn chưa đạt được tại điểm đặt(sai lệch 3.1cm). Khi tăng Q3, thời gian xác lập vị trí viên bi tương đối nhanh(5.04s), sai số xác lập vị trí viên bi nhỏ, chỉ 0.73cm. Nhìn chung khi thay đổi các thông số Q(1,2,3,4), sai số xác lập góc của thanh beam thay đổi không đáng kể.

5. Kết luận

Trong bài báo này, hệ thống bóng thanh trục lệch được điều khiển bằng phương pháp LQR. Qua kết quả mô phỏng và thực nghiệm ta có thể thấy được giải thuật LQR đã mang lại một hiệu quả nhất định, tuy nhiên tốc độ đáp ứng và thời gian xác lập vẫn chưa thực sự tốt nhất. Để có được kết quả tốt hơn, cần phải thử thêm nhiều thông số tối ưu K thông qua việc lựa chọn ma trận Q và R.

Tài liệu tham khảo

- [1] Quanser, Ball and Beam, Experiment. Quanser Consulting (1991)
- [2] M. Shah, R. Ali and F. M. Malik: Control of Ball and Beam with LQR Control Scheme using Flatness Based Approach, International Conference on Computing, Electronic and Electrical Engineering (ICE Cube), IEEE, pp. 1-5 (2018)
- [3] Jin-Soo Kim, Gyu-Man Park, and Ho-Lim Choi: Sliding mode control design under partial state feedback for ball and beam system, Proceeding of ICCAS, pp. 1293-1296, (2010)
- [4] Thi-Thuy Hoang, Hoang-Phi-Khoi Nguyen, Tuan Nguyen, Van-Dong-Hai Nguyen, Diep-Thuy-Duong Le, Xuan-Chinh Trinh, Ngoc-Phu Nguyen, Phan-Phuc-Long Nguyen: A Method of Fuzzy Algorithm in Controlling Ball and Beam through Simulation and Experiment, International Journal of Robotica & Management, Vol. 26, No. 2, pp. 03-08, (2021)
- [5] Mazenc, F., Astolfi, A., Lozano, R.: Lyapunov function for the ball and beam: robustness property. In: Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ, pp. 1208– 1213 (1999)
- [6] Marton, L., Lantos, B.: Stable adaptive ball and beam control. In: Proc. IEEE International Conference on Mechatronics, Budapest, Hungary, pp. 507–512 (2006)
- [7] Farhan A. Salem: Mechatronics Design of Ball and Beam System: Education and Research. ISSN 2224-5774 (Paper) ISSN 2225-0492 (Online), Vol.3, No.4, 2013
- [8] Carlos G. Bolívar-Vincenty, Gerson Beauchamp-Báez: Modelling the Ball-and-Beam System, from Newtonian Mechanics and from Lagrange Methods. Twelfth LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2014) "Excellence in Engineering To Enhance a Country's Productivity" July 22 - 24, 2014 Guayaquil, Ecuador.

- [9] Stepan Ozana, Martin Pieš: Design and implementation of LQR controller for inverted pendulum by use of REX control system. 2012 12th International Conference on Control, Automation and Systems Oct. 17-21, 2012 in ICC, Jeju Island, Korea.
- [10] Metin U. Salamci, Nurdan Bilgin, Sinan Özcan, Emin Yusuf Avan: Sliding Mode Control Design for Nonlinear Systems without Reaching Phase. January 2012 Conference: Control, Automation and Systems (ICCAS), 2012 12th International Conference.

Ngày nhận bài: 21/10/2022

Ngày hoàn thành sửa bài: 26/12/2022

Ngày chấp nhận đăng: 28/12/2022