

## Điều khiển LQR cho hệ bóng thanh trục giữa

### LQR Control for Ball and Beam System with Middle Axis

Trần Nguyễn Đăng Khoa<sup>1</sup>, Trương Mai Hà<sup>2</sup>, Nguyễn Hữu Đạt<sup>2</sup>, Lê Văn Tú<sup>2</sup>, Nguyễn Thành Nhân<sup>2</sup>, Nguyễn Thế Trung<sup>2</sup>, Nguyễn Bá Hiện<sup>2</sup>, Dương Quốc Bảo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Đại học Tôn Đức Thắng (TDTU), Thành phố Hồ Chí Minh

<sup>2</sup> Trường Đại học sư phạm kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUTE), Thành phố Hồ Chí Minh

Tác giả liên hệ: Trần Nguyễn Đăng Khoa. Email: dangkhoa.tran195@gmail.com

**Tóm tắt:** Bài báo trình bày việc áp dụng phương pháp Linear Quadratic Regulator (LQR) để điều khiển hệ thống ball and beam (B&B) trục giữa – một hệ thống một vào nhiều ra (single input multi output – SIMO) thông dụng trong điều khiển tự động (ĐKTĐ). Bằng cách sử dụng các kết quả thu được từ các phép đo và mô phỏng, bộ điều khiển (BĐK) LQR đã chứng minh được hiệu quả trong việc điều khiển ổn định cho hệ B&B trục giữa. Bên cạnh đó, các kết quả tinh chỉnh thông số điều khiển cũng được trình bày để củng cố lý thuyết hiệu chỉnh LQR và chỉ ra các thông số quan trọng nhất trong quá trình hiệu chỉnh đối với riêng đối tượng này (thay vì việc quan tâm quá nhiều thành phần khác). Nghiên cứu đóng góp học thuật thông qua quá trình tinh chỉnh riêng cho hệ BTTG. Trên cơ sở đó, nghiên cứu tạo nền tảng cho việc phát triển tiếp tục quy trình tìm kiếm, tối ưu thông số điều khiển cho đối tượng trên.

**Từ khóa:** *Ball and beam; điều khiển cân bằng; giải thuật LQR; SIMO*

**Abstract:** This paper presents the application of LQR to control a B&B with middle axis – a popular SIMO model in control engineering. By using results from measurement and simulation, LQR is proven to work well in balancing B&B with middle axis. Besides, results from calibration control parameters are presented to maintain theory of LQR and it shows important parameters of LQR controller for this model (instead of focusing on many other components). This study gives academic contribution in own calibration for B&B with middle axis. Thence, this investigation creates basement for development of finding and optimizing control parameters for this model.

**Keywords:** *Ball and Beam; balancing control; LQR algorithm; SIMO*

#### 1. Đặt vấn đề

Hệ BTTG là một hệ thống kiểm soát cổ điển được sử dụng để nghiên cứu động học và kiểm soát của một quả bóng di chuyển trên một thanh. Mặc dù hệ thống này chủ yếu được sử dụng trong môi trường giáo dục, nhưng nó có ứng dụng tiềm năng trong nhiều ngành công nghiệp khác nhau, bao gồm cả ngành hàng hải.

Trong một con tàu, hệ thống này có thể được sử dụng để kiểm soát chuyển

động và ổn định của tàu. Quả bóng có thể đại diện cho trọng tâm của tàu, trong khi thanh có thể đại diện cho thân tàu. Bằng cách kiểm soát chuyển động của quả bóng trên thanh, chuyển động của tàu có thể được ổn định, và tàu có thể được ngăn khỏi lật hoặc chìm. Do đó, việc nghiên cứu thiết kế trên mô hình này sẽ giúp người thiết kế giải thuật ứng biến, áp dụng vào mô hình thực để có phương án điều khiển tối ưu nhất.

Trong những năm gần đây, mô hình B&B đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Trong đó, ở tài liệu [1], một BDK PID đã được xây dựng một mô hình B&B trục giữa (BBTG) trên cả mô phỏng và thực nghiệm. Tuy nhiên, việc lựa chọn các tham số điều khiển trong nghiên cứu trước đó được thực hiện dựa trên phương pháp thử và sai thủ công, vì vậy không đảm bảo tính toán chính xác.

Trong nghiên cứu tiếp theo [2], các tác giả đã loại bỏ thành phần phi tuyến không quan trọng của hệ phương trình toán học để chuyển nó về dạng Jordan. Kết quả là thiết kế LQR cho hệ này đã mang lại chất lượng kiểm soát tốt hơn [3]. Họ chỉ xem xét trường hợp với đầu vào mô-men xoắn, thay vì đầu vào điện áp, giúp dễ dàng loại bỏ thành phần phi tuyến không quan trọng hơn. Tuy nhiên, khi xem xét hệ mô tả bằng tập phương trình động lực học sử dụng đầu vào điện áp, cấu trúc phi tuyến trở nên phức tạp hơn. Việc nhận ra và tách các thành phần phi tuyến để chuyển hệ thống về dạng Jordan trở nên khó khăn.

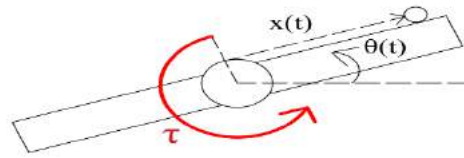
Giải thuật di truyền (genetic algorithm – GA) đã được áp dụng để tối ưu hóa LQR và đã được kiểm chứng thành công trên mô phỏng cho mô hình BBTG trong nghiên cứu [3]. Việc khảo sát tối ưu hóa LQR dựa trên GA cho mô phỏng là một bước tiến quan trọng so với nghiên cứu [2].

Trong nghiên cứu này, một khảo sát sự tinh chỉnh trên mô phỏng các thông số LQR đến chất lượng điều khiển cho hệ BTTG được thực hiện. Thông qua việc tinh chỉnh, các quy luật hiệu chỉnh được kiểm chứng và xác nhận. Từ đó, kết quả nghiên cứu đóng góp một tài liệu

tham khảo và đào tạo về tinh chỉnh LQR cho các hệ SIMO cho người học về ĐKTĐ

## 2. Mô hình hóa hệ thống

### 2.1. Mô hình toán học



Hình 1. Mô hình toán hệ BBTG

Trong đó,  $\theta$  là góc lệch thanh beam;  $\dot{\theta}$  là vận tốc thanh beam;  $x$  là vị trí quả bóng;  $\tau$  là moment xoắn, điện áp cấp cho motor e được chọn là  $u$  - tín hiệu điều khiển. Theo Hình 1, việc điều khiển BBTG tương ứng với điều khiển làm cho beam di chuyển xung quanh trục động cơ với mô men xoắn  $\tau$  để quả bóng có thể đạt vị trí mong muốn của nó trên beam. Khi đó, thanh cân bằng theo phương ngang và giữ quả bóng đứng yên tại vị trí cân bằng. Phương trình toán học của BBTG theo tài liệu [4] như sau:

Thế năng quả bóng là:

$$p_b = mgx \sin \theta \quad (1)$$

Thế năng thanh beam là:

$$p_B = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), tổng thế năng của hệ thống được tính như sau

$$P = p_b + p_B = mgx \sin \theta \quad (3)$$

Động năng của thanh beam là

$$T_B = J_B \dot{\theta}^2 / 2 \quad (4)$$

Trong đó,  $J_B = m_B L^2 / 12$  là moment quán tính của beam khi nó quay quanh trục vuông góc với beam và đi qua trung điểm của beam. Động năng của quả bóng quay quanh chính nó

$$T_{b\_roll\_1} = J_b \dot{\theta}_b^2 / 2 \quad (5)$$

Trong đó,  $J_b = 2mr^2/5$  là moment quán tính của quả bóng khi quay quanh chính nó;  $\dot{\theta}_b$  là vận tốc quay quanh tâm của bản thân quả bóng.

Động năng quay của quả bóng khi nó quay quanh trục thanh beam

$$T_{b\_roll\_2} = J_{b\_roll\_2} \dot{x}^2 / 2 \quad (6)$$

Trong đó,  $J_{b\_roll\_2} = mx^2$  là moment quán tính của quả bóng khi nó quay quanh trục quay của beam. Động năng tịnh tiến của quả bóng

$$T_{b\_translational} = m\dot{x}^2 / 2 \quad (7)$$

Từ (5)-(7), động năng của quả bóng được tính như sau

$$T_b = T_{b\_translational} + T_{b\_roll} \quad (8)$$

Từ (4) và (8), tổng động năng của hệ là

$$T = T_b + T_B \quad (9)$$

Toán tử Lagrange được định nghĩa như sau:

$$L = T - P = m\dot{x}^2/2 + mgx \sin \theta \quad (10)$$

Theo phương pháp Euler-Lagrange, hệ phương trình toán hệ thống là:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (12)$$

Trong đó, ta có:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m + \frac{J_b}{r^2}) \ddot{x}$ ;

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (mx^2 + J_b) \ddot{\theta};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2x\dot{x}\dot{\theta} - mgx \cos \theta$$

Tính toán tiếp tục (11) và (12), kết hợp với công thức chuyển đổi giữa momen và điện áp động cơ sau [5]:

$$\tau = K_t e / R_m - (K_b K_t / R_m + C_m) \dot{\theta} \quad (13)$$

Hệ phương trình phi tuyến của BBTG được tính ra như sau

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{-k_1 + C_m \dot{\theta} - k_2 e + 2m\dot{x}\dot{\theta} + mgx \cos \theta}{(mx^2 + \frac{l^2 m_B}{12}) (\frac{12J_m}{12mx^2 + l^2 m_B} + 1)} \\ \ddot{x} = \frac{5r^2 (m\dot{x}\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta)}{5r^2 m + 2r^2 m} \end{cases} \quad (14)$$

Trong đó,  $k_1 = \frac{k_b k_t}{R_m} + C_m$ ;  $k_2 = \frac{k_t}{R_m}$ ;

thông số động cơ được trình bày trong Bảng 1 (do động cơ được sử dụng là động cơ NISCA giống ở tài liệu [5] nên thông số động cơ được áp dụng lại; thông số mô hình mô phỏng được đo đạc từ mô hình thực tế ở [4].

**Bảng 1.** Thông số động cơ [5]

Thông số	Mô tả	Giá trị
$R_m$	Điện trở cuộn dây động cơ	6.83572 $\Omega$
$L$	Hệ số điện kháng	0.25086 H
$k_b$	Hằng số phản điện	0.06494 V/(rad/sec)
$k_t$	Hằng số momen	0.06494 Nm/A
$C_m$	Hệ số ma sát nhớt	0.00004 Nm/(rad/sec)

**Bảng 2.** Thông số mô hình

Thông số	Mô tả	Giá trị
m	Khối lượng quả bóng	0.09kg
M	Khối lượng thanh beam	0.45kg
L	Chiều dài thanh beam	0.37m
g	Gia tốc trọng trường	0.2m
R	Bán kính quả bóng	9.81m/s <sup>2</sup>

**2.2. Tuyến tính hóa hệ BBTG**

Hệ phương trình động lực học ở (14) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{15}$$

Trong đó,

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T ;$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{k_2}{(mx_1^2 + J_B)(\frac{C_m}{mx_1^2 + J_B} + 1)} \end{bmatrix}^T$$

Phương trình toán học dạng tuyến tính:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{16}$$

Trong đó

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$

Điểm làm việc được chọn là vị trí bóng đứng yên tại chỗ giữa giữa thanh beam, thanh beam nằm ngang và đứng yên

hoàn toàn, động cơ không được cấp điện áp. Điểm làm việc đó được mô tả như sau:

$$\begin{cases} x = x_0 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \\ = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ u = u_0 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Với thông số mô hình ở Bảng 1 và Bảng 2, điểm làm việc ở (17), giá trị ma trận A và B được tính ra như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -180.4595 & 0 & 0 & -0.2039 \end{bmatrix} ;$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 2.9128]^T \tag{18}$$

**3. Thiết kế LQR**

Theo lý thuyết điều khiển LQR [6], khi hệ thống ở điểm làm việc tĩnh thì tín hiệu điều khiển có giá trị như sau sẽ ổn định được hệ thống khi hệ ở lân cận điểm làm việc tĩnh.

$$u(t) = -Kx(t) \tag{19}$$

Trong đó, K là ma trận điều khiển, x(t) là ma trận biến trạng thái.

Giá trị của ma trận K cần được tối ưu, tức là giá trị tìm được phải thỏa mãn giá trị - tiêu chí đánh giá chất lượng của hệ thống đạt giá trị nhỏ nhất.

Chỉ tiêu chất lượng là:

$$J = \int (x^T Qx + u^T Ru) dt \tag{20}$$

Trong đó, Q là ma trận trọng số đối xứng xác định dương. R là trọng số công suất.

Ma trận được xác định bởi phương trình đại số Riccati

$$K = R^{-1} B^T S \tag{21}$$

Trong đó, S là nghiệm của phương

trình Đại số Riccati. được tìm thấy bằng cách giải phương trình Riccati

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (22)$$

Việc tính toán phương trình (22) là khó khăn. Do đó, Matlab có hỗ trợ công cụ tính toán thông qua lệnh `lqr()` và `dlqr()`. Qua đó, ma trận điều khiển K được xác định dễ dàng bằng công thức:

$$K = dlqr(A_d, B_d, Q, R, T) \quad (23)$$

Trong đó, ta có  $A_d, B_d$  là ma trận tuyến tính hệ thống nhưng đã được rời rạc hóa theo công thức:

$$[A_d, B_d] = c2d(A, B, T) \quad (24)$$

T là thời gian lấy mẫu được chọn là 0,01s.

#### 4. Kết quả mô phỏng

Thử sai lần lượt các tham số của ma trận trọng số Q và hệ số công suất R và chạy mô phỏng để tìm kết quả tối ưu

Đầu tiên, ta chọn ma trận Q, R chuẩn như sau:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 1 \quad (25)$$

Từ (23) và (25), giá trị ma trận thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-56.23 \quad -13.01 \quad 21.14 \quad 3.8] \quad (26)$$

Tăng giá trị R (lên 1.5) và giữ nguyên Q so với (25), ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 1.5 \quad (27)$$

Từ (23) và (27), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-56.27 \quad -12.75 \quad 20.27 \quad 3.7] \quad (28)$$

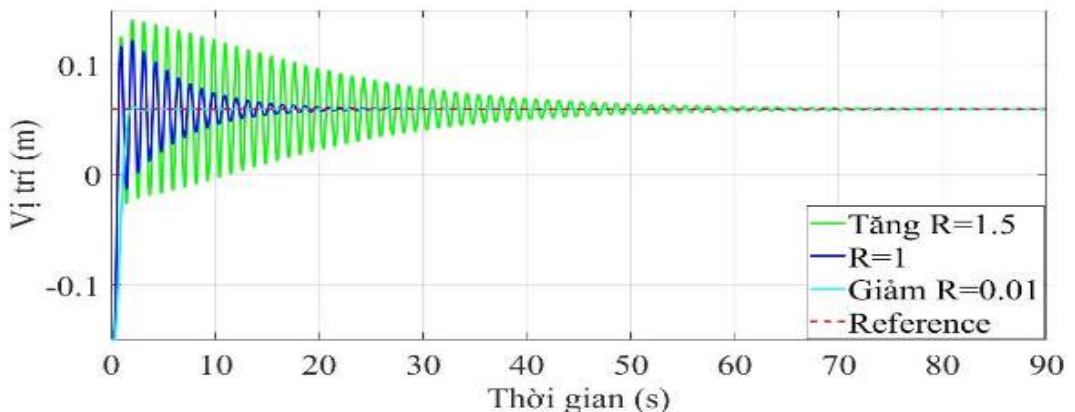
Giảm giá trị R=0.01 và giữ nguyên Q, ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 0.01 \quad (29)$$

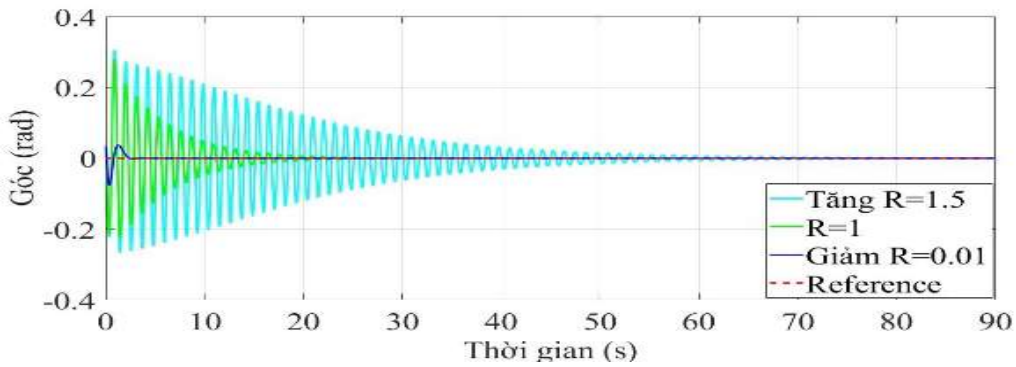
Từ (23) và (29), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-54.63 \quad -21.91 \quad 54.94 \quad 10.32] \quad (30)$$

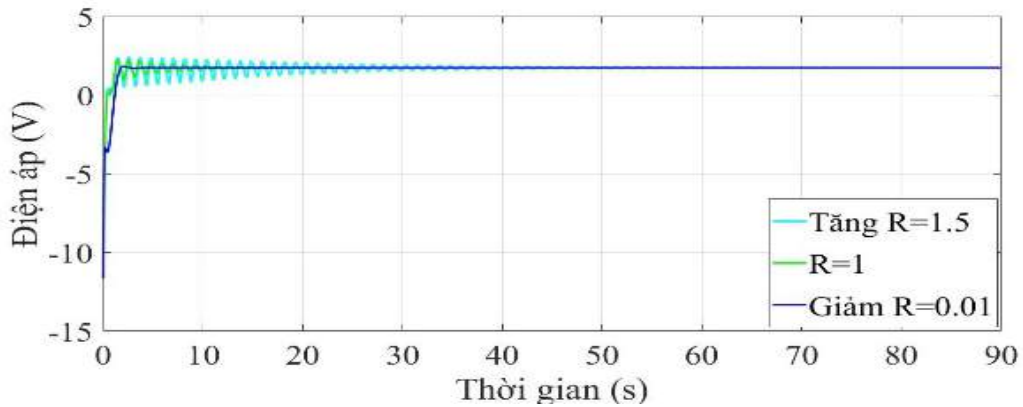
Lúc này, kết quả mô phỏng các trường hợp (26), (28), (30) được thể hiện ở Hình 2 đến Hình 4. Sự so sánh chỉ tiêu chất lượng tương ứng của các hình được thể hiện ở Bảng 3 đến Bảng 4.



Hình 2. Vị trí quả bóng (m)



**Hình 3.** Góc lệch thanh beam (rad)



**Hình 4.** Điện áp cấp cho động cơ (V)

**Bảng 3.** Tham số phản ánh chất lượng hệ thống thông qua vị trí quả bóng khi thử sai R

	Biên độ đỉnh	Thời gian xác lập	Sai số xác lập
$R = 1.5$	0.1413	89.9	0
$R = 1$	0.1228	34.44	0
$R = 0.01$	0.0621	4.46	0

Theo Bảng 3, khi trọng số R giảm, thời gian các lập của vị trí quả bóng cũng giảm. Đáp ứng hệ thống là nhanh hơn. Điều này tương đương với việc tăng tương ứng các trọng số của ma trận Q.

**Bảng 4.** Tham số phản ánh chất lượng hệ thống thông qua góc lệch thanh beam khi thử sai R

	Biên độ đỉnh	Thời gian xác lập	Sai số xác lập
$R = 1.5$	0.3052	2.389	0
$R = 1$	0.2788	2.236	0
$R = 0.01$	0.03748	2.09	0

Theo Bảng 4, khi R giảm, sự dao động góc lệch của thanh beam cũng giảm, tương ứng sự giảm dao động của quả bóng ở Bảng 3. Thời gian xác lập của thanh beam là phù hợp với thời gian xác lập của vị trí quả bóng.

**Bảng 5.** Tham số phản ánh chất lượng hệ thống của điện áp khi thử sai

	Biên độ đỉnh
$R = 1.5$	2.391
$R = 1$	2.232
$R = 0.01$	1.82

Theo Bảng 5, khi R giảm, do sự ổn định của vị trí quả bóng và góc lệch thanh beam (ở Bảng 3 và Bảng 4), điện áp cấp cho động cơ cũng ít dao động hơn.

**Nhận xét 1:**

Vị trí quả bóng đạt biên độ đỉnh, thời gian xác lập khi nhỏ nhất. Điều này cũng tương ứng với góc lệch beam và điện áp. Vậy, giá trị  $R=0.01$  là tối ưu để thực hiện công việc tinh chỉnh tiếp theo. Và, quá trình tinh chỉnh là phụ hợp với lý thuyết điều khiển LQR [6].

Tiếp theo tăng giá trị  $Q_1=10$ , R giữ nguyên so với (33), ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 0.01 \quad (31)$$

Từ (31) và (23), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-65.21 \quad -26.8 \quad 61.8 \quad 10.67] \quad (32)$$

Tăng giá trị  $Q_2=10$ , R giữ nguyên so với (31), ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 0.01 \quad (33)$$

Từ (33) và (23), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-54.42 \quad -35.1 \quad 71.89 \quad 10.8] \quad (34)$$

Tăng giá trị  $Q_3=10$ , R giữ nguyên so với (31), ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = 0.01 \quad (35)$$

Từ (35) và (23), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-54.54 \quad -23.1 \quad 62.38 \quad 10.54] \quad (36)$$

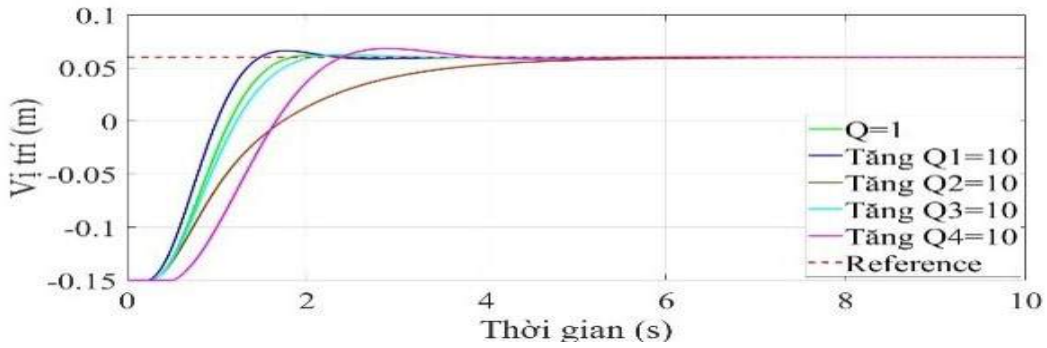
Tăng giá trị  $Q_4=10$ , R giữ nguyên so với (31), ta có

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; R = 0.01 \quad (37)$$

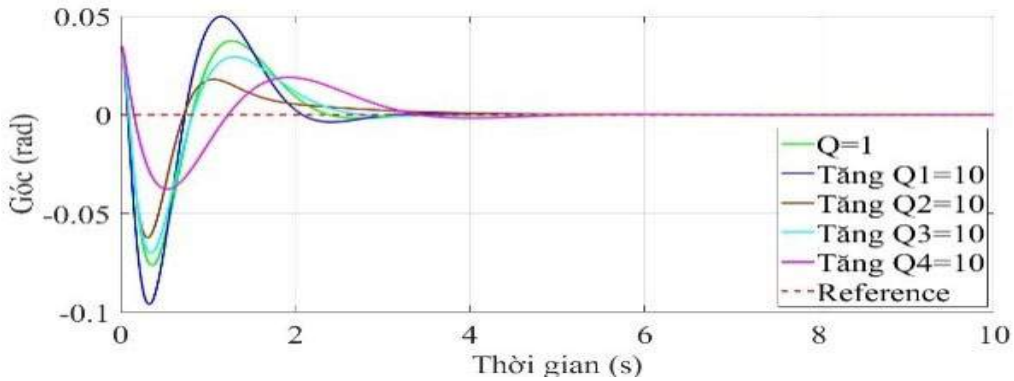
Từ (37) và (23), giá trị ma trận K thu được như sau:

$$K_{LQR} = [-48.14 \quad -22 \quad 79.92 \quad 21.14] \quad (38)$$

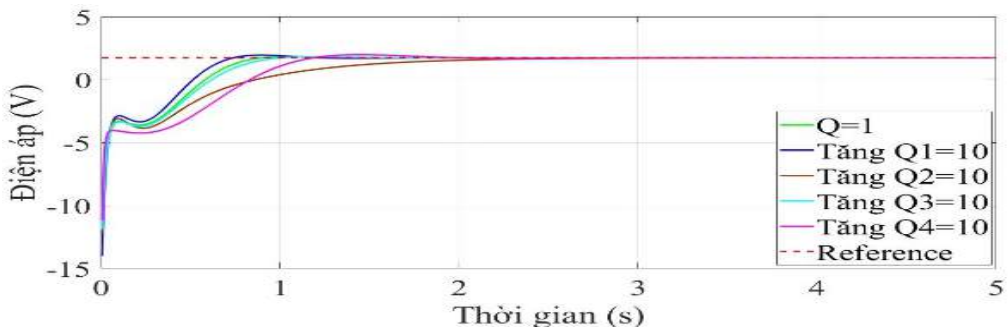
Lúc này, kết quả mô phỏng các trường hợp (32), (34), (36) được thể hiện ở Hình 5 đến Hình 7. Sự so sánh chỉ tiêu chất lượng tương ứng của các hình được thể hiện ở Bảng 6 đến Bảng 8.



**Hình 5.** Vị trí quả bóng (m) khi thử sai



**Hình 6.** Góc lệch beam (rad) khi thử sai



**Hình 7.** Điện áp cấp cho động cơ (V) khi thử sai

**Bảng 6.** Tham số phản ánh chất lượng vị trí quả bóng khi thử sai

	Biên độ đỉnh	Thời gian xác lập	Sai số xác lập
$Q=1$	0.0622	4.05	0
$Q_1=10$	0.06616	4.61	0

$Q_2=10$	0.06	9.88	0
$Q_3=10$	0.06239	4.98	0
$Q_4=10$	0.06821	7.69	0

Ở Bảng 6, so với việc giữ  $Q$  là ma trận đơn vị và lần lượt thay đổi các thông số  $Q_i$  còn lại, ta thấy, trường hợp các  $Q_i$  đều bằng 1 và  $Q_2=10$  là tối ưu nhất với



thời gian xác lập của quả bóng là nhỏ nhất.

**Bảng 7.** Tham số phản ánh chất lượng góc lệch beam khi thử sai

	Biên độ đỉnh	Thời gian xác lập	Sai số xác lập
$Q = 1$	0.03748	4.42	0
$Q_1 = 10$	0.04985	4.09	0
$Q_2 = 10$	0.018	6.26	0
$Q_3 = 10$	0.0294	3.97	0
$Q_4 = 10$	0.019	6.57	0

Ở Bảng 7, việc  $Q_2$  tăng so với các  $Q_i$  khác được xác nhận. Điều này phù hợp với kết quả ở Bảng 6.

**Bảng 8.** Tham số phản ánh chất lượng hệ thống của điện áp khi thử sai

	Biên độ đỉnh
$Q = 1$	1.82
$Q_1 = 10$	1.945
$Q_2 = 10$	1.734
$Q_3 = 10$	1.814
$Q_4 = 10$	1.975

Ở Bảng 8, việc tăng  $Q_2$  so với các  $Q_i$  khác cho kết quả điều khiển tốt hơn, xác nhận việc tinh chỉnh tương ứng ở Bảng 6 và Bảng 7.

**Nhận xét 2:**

Trong quá trình tinh chỉnh, tương ứng các  $Q_i$  đều bằng ma trận đơn vị và  $Q_2$  được tăng thì chất lượng hệ thống là tốt nhất (vị trí quả bóng, góc lệch thanh beam, điện áp cấp cho mô hình đạt biên độ dao động ít nhất và xác lập nhanh nhất). Và, bộ thông số điều khiển ở (33) và (34) là phù hợp nhất.

**5. Kết luận**

Trong nghiên cứu này, hệ phương trình toán của hệ BTTG được phân tích và giải thuật LQR được thiết kế phù hợp mô hình. Các quá trình tinh chỉnh, so sánh sự hiệu chỉnh các thông số được thực hiện để cho ra bộ thông số phù hợp nhất. Thông qua quá trình tinh chỉnh, một số ít các thông số điều khiển là quan trọng thay vì quá nhiều thông số điều khiển được chú ý (trong trường hợp này là R và  $Q_2$ ). Tuy nhiên, điều này chỉ đúng trong trường hợp mô hình được sử dụng là BTTG. Nghiên cứu này đưa ra một quá trình hiệu chỉnh mà những người nghiên cứu về BTTG có thể tham khảo để nâng cao chất lượng điều khiển cho hệ trên. Từ đó, các giải pháp cho các đối tượng SIMO tương tự sẽ được phát triển tiếp tục.

**Tài liệu tham khảo**

- [1] Nguyễn Ngô Anh Quân, Hà Đắc Bình, *Thiết kế và đánh giá thực nghiệm bộ điều khiển PID ổn định hệ thống cân bằng bóng trên thanh*, Tạp chí Khoa học và công nghệ Đại học Duy Tân, 07 (38), trang 65-73, 2020.
- [2] Chiem Nguyen Xuan et al, *Building Quasi-Time-Optimal Control Laws for Ball and Beam System*, International Conference on Recent Advances in Signal Processing, Telecommunications & Computing (SigtelCom), pp. 30-32, IEEE, 2019.
- [3] Le, A. T., & Tran, N. D. K, *Applying a Genetic Algorithm to optimize Linear Quadratic Regulator for Ball and Beam system*, The 7th International Conference on Advanced Engineering – Theory and Applications, 2022.

- [4] Tran, N. D. K., *Using genetic algorithm to optimize LQR controller for ball and beam system*, Master thesis, Ton Duc Thang University, 2023.
- [5] Vo , A. K. et al, *Model and control algorithm construction for rotary inverted pendulum in laboratory*, Journal of Technical Education Science, (49), 32–40, 2018.
- [6] Doya, K., *Bayesian Brain*, pp.1-28, MIT Press, 2006.
- [7] M. Srinivas and L. M. Patnaik, *Genetic algorithms: a survey*, in *Computer*, IEEE, Vol. 27, No. 6, pp. 17-26, June 1994

**Ngày nhận bài: 21/6/2023**

**Ngày hoàn thành sửa bài: 22/8/2023**

**Ngày chấp nhận đăng: 28/8/2023**